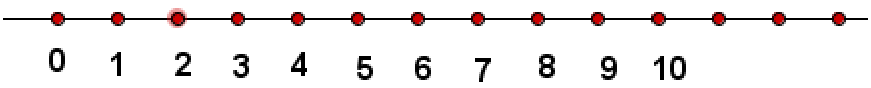
NUMEROS REALES

Los números naturales

Con los **números naturales** contamos los elementos de un conjunto (**número cardinal**). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (**ordinal**).

El conjunto de los **números naturales** está formado por:

N= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...}



La s**uma y el producto** de **dos números naturales es otro número natural**.

La **diferencia** de **dos números naturales** ***no*** **siempre es un número natural**, sólo ocurre cuando el minuendo es mayor que sustraendo.

$5 - 3 \in \mathbb{N}$

$3 - 5 \notin \mathbb{N}$

El **cociente** de **dos números naturales** ***no*** **siempre es un número natural**, sólo ocurre cuando la división es exacta.

$6 : 2 \in \mathbb{N}$

$2 : 6 \notin \mathbb{N}$

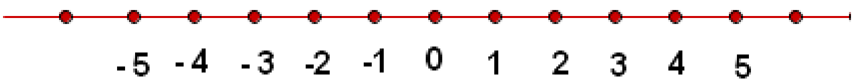
Podemos utilizar **potencias**, ya que es la forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

La **raíz** de **un número natural *no* siempre es un número natural**, sólo ocurre cuando la raíz es exacta.

Los números enteros

Los **números enteros** son del tipo:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots\}$$



Nos permiten expresar: el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, las profundidades con respecto al nivel del mar, etc.

La **suma**, la **diferencia** y el **producto** de **dos números enteros es otro número entero**.

El **cociente** de **dos números enteros *no* siempre es un número entero** , sólo ocurre cuando la división es exacta.

$6 : 2 \in \mathbb{Z}$

$2 : 6 \notin \mathbb{Z}$

Podemos operar con **potencias**, pero el **exponente** tiene que ser un número **natural**.

$$(-2)^3 = -8 \in \mathbb{Z}$$

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{-8} \notin \mathbb{Z}$$

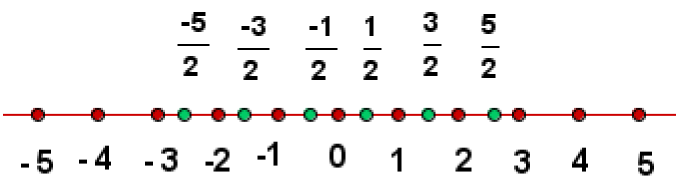
La **raíz** de un **número entero *no* siempre es un número entero**, sólo ocurre cuando la raíz es exacta o si se trata de una raíz de índice par con radicando positivo.

$$\sqrt{-4} \notin \mathbb{Z}$$

Los números racionales

Se llama **número racional** a todo número que puede representarse como el **cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;/\; a \in \mathbb{Z};\; b \in \mathbb{Z};\; b \neq 0 \right\}$$



Los **números decimales** (decimal exacto, periódico puro y periódico mixto) son **números racionales**; pero los otros números decimales ilimitados no.

La **suma, la diferencia, el producto y el cociente** de **dos números racionales es otro número racional**.

Podemos operar con **potencias**, pero el **exponente** tiene que ser un número **entero**.

La **raíz** de **un número racional *no* siempre es un número racional**, sólo ocurre cuando la raíz es exacta y si el índice es par el radicando ha de ser positivo.

$$\sqrt{-\frac{4}{5}} \notin \mathbb{Q}$$

Los números irracionales

Un **número** es **irracional** si posee **infinitas cifras decimales no periódicas**, por tanto **no se pueden expresar en forma de fracción**.

El **número irracional** más conocido es π, que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

π = 3.141592653589...

Otros **números irracionales** son:

El número **e** aparece en procesos de crecimiento, en la desintegración radiactiva, en la fórmula de la catenaria, que es la curva que podemos apreciar en los tendidos eléctricos.

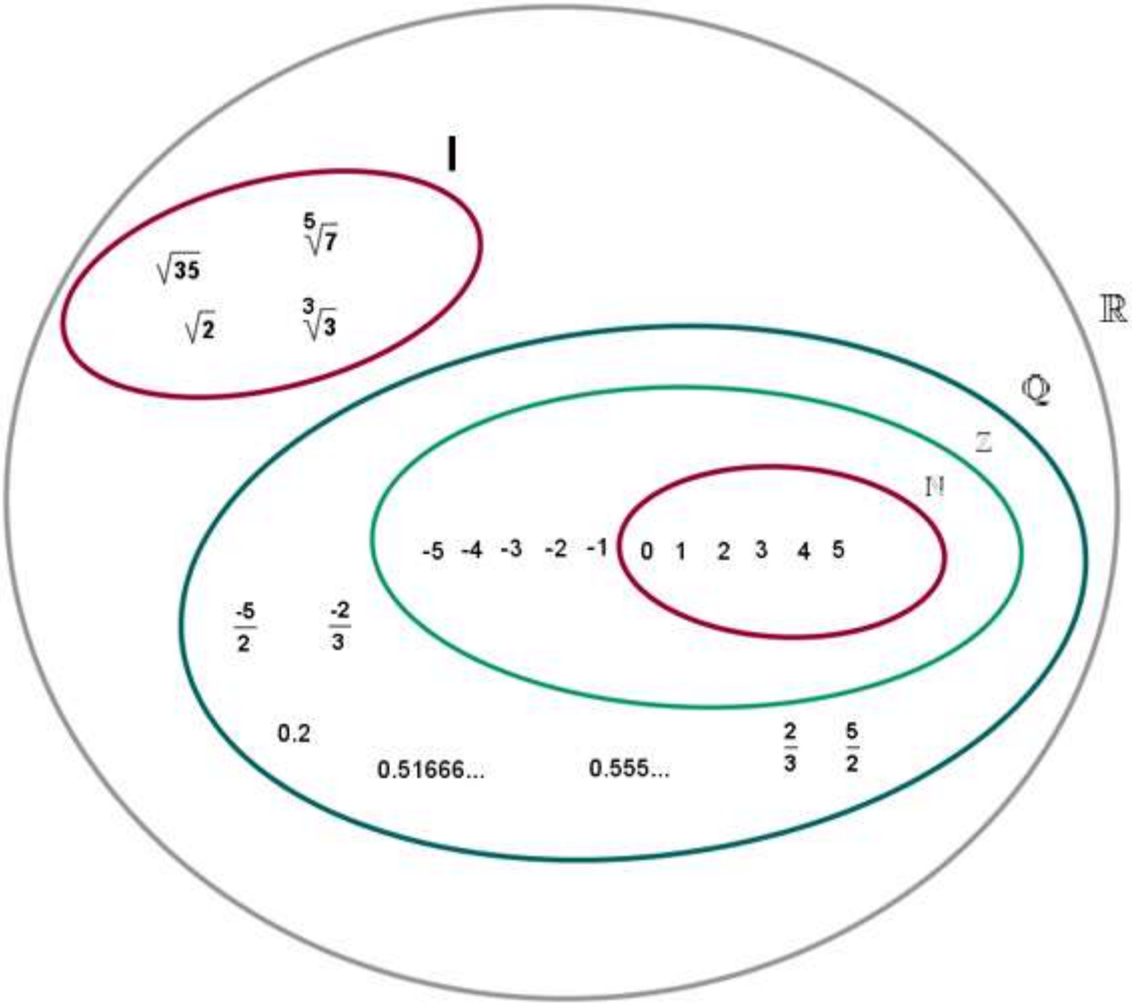
e = 2.718281828459...

El **número áureo**, Φ, utilizado por artistas de todas las épocas (Fidias, Leonardo da Vinci, Alberto Durero, Dalí,..) en las proporciones de sus obras.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749...$$

Números reales

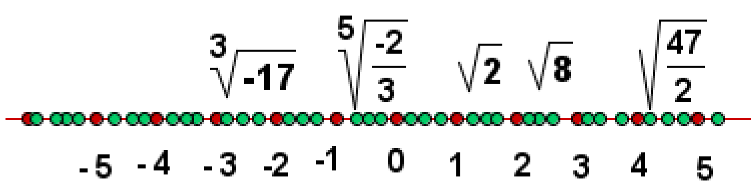
El **conjunto formado** por los números **racionales** e **irracionales** es el conjunto de los ***números reales***, se designa por $\mathbb{R}$.



Con los **números reales** podemos realizar **todas las operaciones, excepto la radicación de índice par y radicando negativo, y la división por cero.**

La recta real

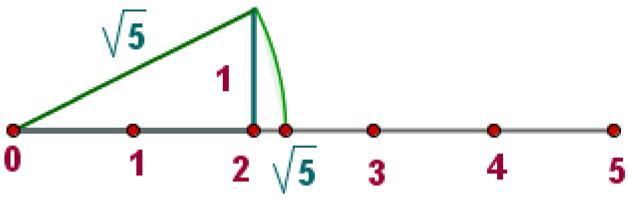
A todo **número real** le corresponde un punto de la recta y a **todo punto de la recta un número real**.



Representación de los números reales

Los **números reales** pueden ser representados en la recta con tanta aproximación como queramos, pero hay casos en los que podemos representarlos de forma exacta.

$$\sqrt{5} = 2^2 + 1^2$$



Operaciones con números reales

Suma de números reales

Propiedades

1.Interna:

El resultado de **sumar dos números reales** es otro **número real**.

$\mathbf{a + b} \in \mathbb{R}$

$\pi + \Phi \in \mathbb{R}$

2.Asociativa:

El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.

$(\mathbf{a + b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b + c})$ ·

$$\sqrt{2}+\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}$$

3.Conmutativa:

El orden de los sumandos no varía la suma.

a + b = b + a

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

4.Elemento neutro:

El **0** es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.

a + 0 = a

π **+ 0** = π

5.Elemento opuesto

Dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado el cero.

e − e = 0

El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

$-(-\Phi) = \Phi$

Diferencia de números reales

La **diferencia** de dos números reales se define como **la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo**.

a − b = a + (−b)

Producto de números reales

La **regla de los signos** del **producto** de los **números enteros y racionales** se sigue manteniendo con los **números reales**.

+	por	+	=	+
-	por	-	=	+
+	por	-	=	-
-	por	+	=	-

Propiedades

1. Interna:

El resultado de multiplicar dos números reales es otro número real.

$a \cdot b \in \mathbb{R}$

2. Asociativa:

El modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si a, b y c son números reales cualesquiera, se cumple que:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$(e \cdot \pi) \cdot \Phi = e \cdot (\pi \cdot \Phi)$

3. Conmutativa:

El orden de los factores no varía el producto.

$a \cdot b = b \cdot a$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$

4. Elemento neutro:

El 1 es el elemento neutro de la multiplicación, porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

a ·1 = a

π **· 1 =1**

5. Elemento inverso:

Un número es inverso del otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento unidad.

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

$$\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1$$

6. Distributiva:

El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

a · (b + c) = a · b + a · c

$\pi \cdot (e + \Phi) = \pi \cdot e + \pi \cdot \Phi$

7. Sacar factor común:

Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.

Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

a · b + a · c = a · (b + c)

$\pi \cdot e + \pi \cdot \Phi = \pi \cdot (e + \Phi)$

División de números reales

La división de dos números reales se define como el producto del dividendo por el inverso del divisor.

Intervalo abierto y cerrado

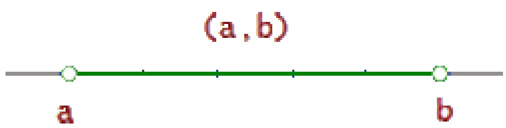
Definición de intervalo

Se llama **intervalo** al **conjunto de números reales** comprendidos entre otros dos dados: **a y b** que se llaman **extremos del intervalo**.

Intervalo abierto

Intervalo abierto, **(a, b)**, es el **conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b**.

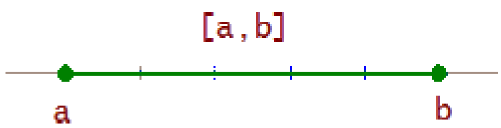
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$



Intervalo cerrado

Intervalo cerrado, **[a, b]**, es el **conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b**.

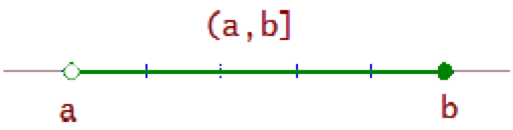
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$



Intervalo semiabierto por la izquierda

Intervalo semiabierto por la izquierda, **(a, b]**, es el **conjunto de todos los números reales mayores que a y menores o iguales que b**.

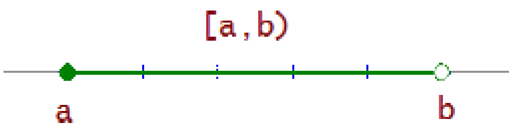
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$



Intervalo semiabierto por la derecha

Intervalo semiabierto por la derecha, **[a, b)**, es el **conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b**.

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$



Cuando queremos nombrar un conjunto de puntos formado por dos o más de estos intervalos, se utiliza el signo $\cup$(**unión**) entre ellos.

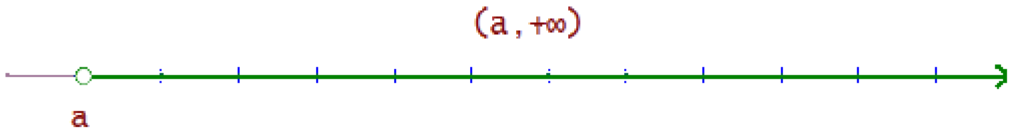
Semirrectas

Semirrectas

Las **semirrectas** están determinadas por un número. En una **semirrecta** se encuentran todos los números mayores (o menores) que él.

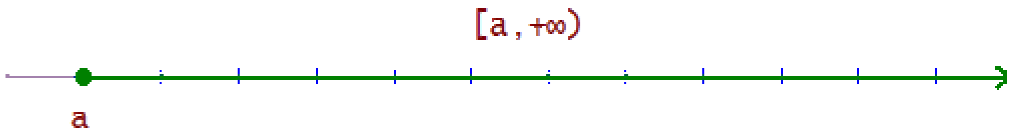
$x > a$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < +\infty\}$



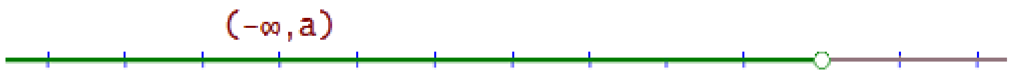
x ≥ a

[a, +∞) = {x ∈ ℝ / a ≤ x < +∞}



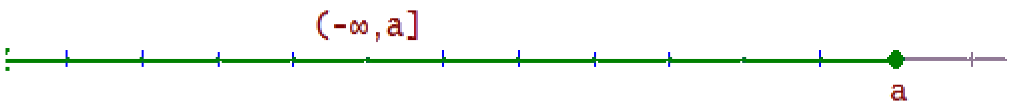
x < a

(-∞, a) = {x ∈ ℝ / -∞ < x < a}



x ≤ a

(-∞, a] = {x ∈ ℝ / -∞ < x ≤ a}



Valor absoluto de un número real

Valor absoluto de un número real **a**, se escribe **|a|**, es el **mismo número** a cuando es **positivo o cero**, y **opuesto** de a, si a es **negativo**.

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si } a < 0 \\ a & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$$

|5| = 5 **|-5 |= 5** **|0| = 0**

$|x| = 2 \qquad x = -2 \qquad x = 2$

$|x| < 2 \qquad -2 < x < 2 \qquad x \in (-2, 2)$

$|x| > 2 \qquad x < 2$ ó $x > 2 \qquad (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

$|x - 2| < 5 \qquad -5 < x - 2 < 5$

$-5 + 2 < x < 5 + 2 \qquad -3 < x < 7$

Propiedades del valor absoluto

1 Los **números opuestos** tienen **igual valor absoluto**.

$|a| = |-a|$

$|5| = |-5| = 5$

2 El **valor absoluto de un producto** es igual al **producto de los valores absolutos** de los factores.

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$|5 \cdot (-2)| = |5| \cdot |(-2)| \qquad |-10| = |5| \cdot |2| \qquad 10 = 10$

3 El **valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos**.

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$|5 + (-2)| \leq |5| + |(-2)| \qquad |3| = |5| + |2| \qquad 3 \leq 7$

Distancia

La **distancia** entre **dos números reales** a y b, que se escribe **d(a, b)**, se define como el **valor absoluto de la diferencia de ambos números**:

d(a, b) = |b − a|

La **distancia** entre −5 y 4 es:

d(−5, 4) = |4 − (−5)| = |4 + 5| = |9|

Potencias

Potencias con exponente entero

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0$$

$$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Con exponente racional o fraccionario

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Propiedades

1. $a^0 = 1$ ·

2. $a^1 = a$

3. **Producto de potencias con la misma base**: Es otra potencia con **la misma base** y cuyo **exponente** es la **suma de los exponentes**.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(-2)^5 \cdot (-2)^2 = (-2)^{5+2} = (-2)^7 = -128$$

4. División de potencias con la misma base: Es otra potencia con la **misma base** y cuyo **exponente** es la **diferencia de los exponentes**.

$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$

$(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3 = -8$

5. Potencia de una potencia: Es otra potencia con l**a misma base** y cuyo **exponente** es el **producto de los exponentes**.

$\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

$[(-2)^3]^2 = (-2)^6 = 64$

6. Producto de potencias con el mismo exponente: Es otra potencia con el **mismo exponente** y cuya **base** es el **producto de las bases**

$\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$

$(-2)^3 \cdot (3)^3 = (-6)^3 = -216$

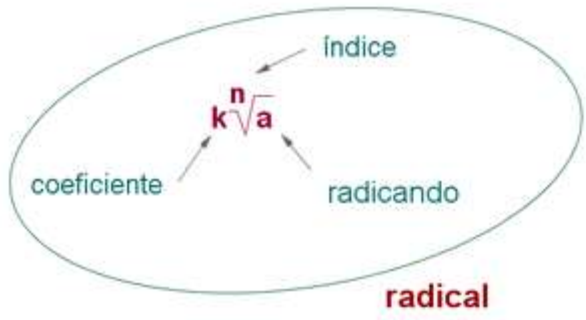
7 .Cociente de potencias con el mismo exponente: Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases.

$\mathbf{a^n : b^n = (a : b)^n}$

$(-6)^3 : 3^3 = (-2)^3 = -8$

Radical

Un **radical** es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que n $\in \mathbb{N}$ y a $\in \mathbb{R}$; con tal que cuando *a* sea negativo, *n* ha de ser impar.



$$\sqrt{64} = \pm 8 \qquad \sqrt{-64} \notin \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[3]{-8} = -2$$

Potencias y radicales

Se puede expresar un **radical** en forma de **potencia**:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$$

Radiales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número la fracción es equivalente, obtenemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

Si se multiplican o dividen el **índice** y el **exponente** de un **radical** por un mismo **número natural**, se obtiene otro **radical equivalente**.

$$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$$

Simplificación de radicales

Si existe un **número natural** que divida al **índice** y al **exponente** (o los exponentes) del radicando, se obtiene un **radical simplificado**.

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

Reducción de radicales a índice común

1 Hallamos el **mínimo común múltiplo de los índices**, que será el común índice

2 **Dividimos el común índice por cada uno de los índices** y cada resultado obtenido **se multiplica por sus exponentes** correspondientes.

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} \qquad \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$$

$$\text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3}$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} \qquad \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9}$$

Extracción e introducción de factores en un radical

Extracción de factores fuera del signo radical

Se descompone el radicando **en factores**. Si:

1 Un **exponente es menor** que el índice, el factor correspondiente **se deja en el radicando**.

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$$

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$$

2 Un **exponente es igual** al índice, el factor correspondiente **sale fuera del radicando**.

$$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$$

3 Un exponente **es mayor que el índice**, **se divide** dicho exponente **por el índice**. El **cociente** obtenido es el **exponente del factor fuera** del radicando y el **resto** es el **exponente del factor dentro** del radicando.

$$\sqrt{48}=\sqrt{2^4\cdot 3}=2^2\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{243}=\sqrt[3]{3^5}=3\sqrt[3]{3^2}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 5^5}=3\cdot 5^2\sqrt{2\cdot 5}$$

$$\sqrt[4]{2^7\cdot 3^{14}\cdot 5^4}=2\cdot 3^3\cdot 5\sqrt[4]{2^3\cdot 3^2}$$

Introducción de factores dentro del signo radical

Se **introducen** los **factores** elevados al **índice** correspondiente del **radical**.

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$$

$$2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$$

$$2^2\cdot 3^3\sqrt[4]{6}$$

$$=\sqrt[4]{(2^2)^4\cdot(3^3)^4\cdot 2\cdot 3}=$$

$$= \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$$

Suma de radicales

Solamente pueden **sumarse** (o **restarse**) **dos radicales** cuando son **radicales semejantes**, es decir, si son **radicales** con el **mismo índice** e **igual radicando**.

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} + c\sqrt[n]{k} = (a+b+c)\sqrt[n]{k}$$

$$2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2-4+1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3-2-1)\sqrt[4]{5} = 0$$

$$\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Producto de radicales

Radicales del mismo índice

Para **multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice**.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} =$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Cuando terminemos de realizar una operación **extraeremos factores del radical**, si es posible.

Radicales de distinto índice

Primero se **reducen a índice común** y luego **se multiplican**.

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{27}=$$

$$m.c.m.(2,3,4)=12$$

$$\sqrt[12]{3^6}\cdot\sqrt[12]{\left(3^2\right)^4}\cdot\sqrt[12]{\left(3^3\right)^3}=\sqrt[12]{3^6\cdot 3^8\cdot 3^9}=\sqrt[12]{3^{23}}=3\,\sqrt[12]{3^{11}}$$

$$\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{36}=$$

$$\mathrm{m.c.m.}(2,3)=6$$

$$\sqrt[6]{12^3}\cdot\sqrt[6]{36^2}=\sqrt[6]{\left(2^2\cdot 3\right)^3\cdot\left(2^2\cdot 3^2\right)^2}=\sqrt[6]{2^6\cdot 3^3\cdot 2^4\cdot 3^4}=\sqrt[6]{2^{10}\cdot 3^7}=6\sqrt[6]{2^4\cdot 3}$$

Cociente de radicales

Radicales del mismo índice

Para dividir radicales con el mismo índice **se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}}=$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}}=\sqrt[6]{\frac{128}{16}}=\sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$$

Radicales de distinto índice

Primero se **reducen a índice común** y luego **se dividen.**

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{\left(2^2\right)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

Cuando terminemos de realizar una operación **simplificaremos el radical**, si es posible.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{\left(2^2\right)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} =$$

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\frac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{\left(2^8\right)^3}{\left(2^4\right)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}} =$$

$$= \sqrt[6]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2\,\sqrt[3]{2^2} = 4\,\sqrt[3]{4}$$

Potencia de radicales

Para elevar un **radical** a una **potencia**, se eleva a dicha **potencia** el **radicando** y se deja el **mismo índice**.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 =$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{\left(2\cdot 3^2\right)^2} = \sqrt[3]{2^2\cdot 3^4} = 3\sqrt[3]{12}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 = \frac{\sqrt[3]{(12)^4}\cdot\sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}} = \frac{\sqrt[3]{\left(2^2\cdot 3\right)^4}\cdot 18}{\sqrt{(2\cdot 3)^4}} =$$

$$= \frac{18\cdot\sqrt[3]{2^8\cdot 3^4}}{\sqrt{2^4\cdot 3^4}} = 18\sqrt[6]{\frac{\left(2^8\cdot 3^4\right)^2}{\left(2^4\cdot 3^4\right)^3}} = 18\sqrt[6]{\frac{2^{16}\cdot 3^8}{2^{12}\cdot 3^{12}}} =$$

$$= 18\sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}} = 18\sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = 18\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

Raíz de un radical

La **raíz de un radical** es otro **radical** de **igual radicando** y cuyo **índice** es el **producto de los dos índices**.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} =$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2}}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(2^{4}\right)^{4} \cdot 2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16} \cdot 2}}} = \sqrt[24]{2^{17}}$$

Racionalización de radicales

La racionalización de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos.

1. Racionalización del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^{2}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b \cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2}} =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

2. Racionalización del tipo $\dfrac{a}{b\,\sqrt[n]{c^{m}}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\,\sqrt[n]{c^{m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\,\sqrt[n]{c^{m}} \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\,\sqrt[n]{c^{m} \cdot c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\,\sqrt[n]{c^{n}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}}=\frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}}=\frac{2\sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}}=\frac{2\sqrt[5]{8}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

3. Racionalización del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, y en general cuando el denominador sea un **binomio con al menos un radical.**

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$$a+b \quad\rightarrow\quad a-b$$

$$-a+b \quad\rightarrow\quad -a-b$$

$$a-b \quad\rightarrow\quad a+b$$

$$-a-b \quad\rightarrow\quad -a+b$$

También tenemos que tener en cuenta que: "**suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados**".

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-3}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-1}=-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{4-2\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}=$$

$$= \frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{16-4\cdot 2} = \frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{8} = \frac{4+2\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)}{\left(5-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)} = \frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{12}}{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2} =$$

$$= \frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{2^2\cdot 3}}{25-4\cdot 6} = \frac{10\sqrt{2}+8\sqrt{3}}{25-24} = 10\sqrt{2}+8\sqrt{3}$$

Números reales y radicales. Resumen

Los números irracionales

Un número es irracional si posee infinitas cifras decimales no periódicas, por tanto no se pueden expresar en forma de fracción.

Los números reales

El **conjunto formado** por los números **racionales** e **irracionales** es el conjunto de los números reales, se designa por $\mathbb{R}$.

Con los **números reales** podemos realizar **todas las operaciones, excepto la radicación de índice par y radicando negativo y la división por cero.**

Los intervalos están determinados por dos números que se llaman extremos. En un intervalo se encuentran todos los números comprendidos entre ambos y también pueden estar los extremos.

Intervalos

Intervalo abierto

(a, b) = {x $\in\mathbb{R}$ / a < x < b}

Intervalo cerrado

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$

Intervalo semiabierto por la izquierda

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$

Intervalo semiabierto por la derecha

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$

Semirrectas

x > a

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < +\infty\}$

x ≥ a

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < +\infty\}$

x < a

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -\infty < x < a\}$

x ≤ a

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -\infty < x \leq a\}$

Valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si } a < 0 \\ a & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$$

Propiedades

$|a| = |-a|$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

Distancia

$d(a, b) = |b - a|$

Entornos

Se llama **entorno de centro a y radio r**, y se denota por $E_r(a)$ o $E(a,r)$, al **intervalo abierto (a-r, a+r).**

$E_r(a) = (a-r, a+r)$

Entornos laterales:

Por la izquierda

$E_r(a^-) = (a-r, a)$

Por la derecha

$E_r(a^+) = (a, a+r)$

Entorno reducido

$E_r^*(a) = \{ x \in (a-r, a+r), x \neq a\}$

Potencias

Con exponente entero

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0$$

Con exponente racional

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Propiedades

1. $a^0 = 1$ · **7.** $a^n : b^n = (a : b)^n$

2. $a^1 = a$

3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

4. $a^m : a^n = a^{m-n}$

5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

6. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Radicales

Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que n $\in \mathbb{N}$ y a $\in \mathbb{R}$; con tal que cuando *a* sea negativo, *n* ha de ser impar.

Se puede expresar un radical en forma de potencia:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Radiales equivalentes

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

Simplificación de radicales

Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o los exponentes) del radicando, se obtiene un radical simplificado.

Reducción de radicales a índice común

1. Hallamos el **mínimo común múltiplo de los índices**, que será el común índice

2. **Dividimos el común índice por cada uno de los índices** y cada resultado obtenido **se multiplica por sus exponentes** correspondientes.

Extracción de factores fuera del signo radical

Se descompone el radicando **en factores**. Si:

Un **exponente es menor** que el índice, el factor correspondiente **se deja en el radicando**.

Un **exponente es igual** al índice, el factor correspondiente **sale fuera del radicando**.

Un exponente **es mayor que el índice**, **se divide** dicho exponente **por el índice**. El **cociente** obtenido es el **exponente del factor fuera** del radicando y el **resto** es el **exponente del factor dentro** del radicando.

Introducción de factores dentro del signo radical

Se introducen los factores elevados al índice correspondiente del radical.

Operaciones con radicales

Suma de radicales

Solamente pueden sumarse (o restarse) dos radicales cuando son radicales semejantess, es decir, si son radicales con el mismo índice e igual radicando.

Producto de radicales

Radicales del mismo índice

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Radicales de distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se multiplican.

Cociente de radicales

Radicales del mismo índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Radicales de distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se dividen.

Potencia de radicales

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Raíz de un radical

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Racionalizar

Consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos.

1. Del tipo $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

2. Del tipo $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m\cdot c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^n}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$$

3. Del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, y en general cuando el denominador sea un **binomio con al menos un radical.**

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Números reales. Ejercicios

1 Clasifica los números:

$$\frac{\pi}{2} \qquad \sqrt{36} \qquad 2.25111\ldots \qquad \sqrt{-5} \qquad \frac{75}{-5}$$

2 Representa en la recta: $\sqrt{17}$

3 Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

$|x| < 1$ $\qquad$ $|x| \le 1$ $\qquad$ $|x| > 1$ $\qquad$ $|x| \ge 1$

4 Calcula los valores de las siguientes potencias:

$$16^{\frac{3}{2}} =$$

$$8^{\frac{2}{3}} =$$

$$81^{0.75} =$$

$$8^{0.333\ldots} =$$

5 Halla las sumas:

$$2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27} =$$

$$\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486} =$$

$$2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} =$$

$$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} =$$

6 Realiza las operaciones:

$$\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)^2 =$$

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^2 =$$

$$\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right) =$$

$$\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right) =$$

7 Opera:

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\frac{1}{8}}}} =$$

8 Efectúa:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}} =$$

9 Calcula:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{\frac{a-b}{\left(a-b\right)^2}\cdot\frac{a+b}{a^2-b^2}} =$$

10 Racionalizar

$$\frac{5}{2\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} =$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{3}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$$

Números reales. Ejercicios

1 Representa en la recta: $\sqrt{13}$

2 Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

$|x-2| < 1$ **$|x-2| \leq 1$** **$|x-2| > 1$** **$|x-2| \geq 1$**

3 Opera:

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[6]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} =$$

4 Calcula:

$$\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}} =$$

5 Racionalizar:

$$\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} =$$

Números reales. Ejercicios resueltos

1

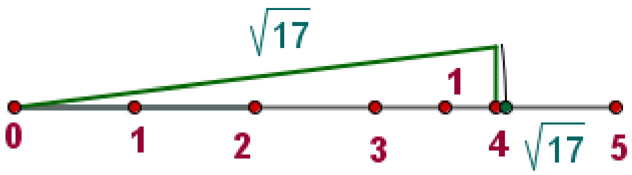
Clasifica los números:

$$\frac{\pi}{2} \qquad \sqrt{36} \qquad 2.25111\ldots \qquad \sqrt{-5} \qquad \frac{75}{-5}$$

$$\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{36} \in \mathbb{N} \qquad 2.25111\ldots \in \mathbb{Q} \qquad \sqrt{-5} \notin \mathbb{R} \qquad \frac{75}{-5} \in \mathbb{Z}$$

Representa en la recta: $\sqrt{17}$

$\sqrt{17} = 4^2 + 1^2$



Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

$|x| < 1$ $|x| \leq 1$ $|x| > 1$ $|x| \geq 1$

$|x| < 1$ $-1 < x < 1$ $x \in (-1, 1)$

$|x| \leq 1$ $-1 \leq x \leq 1$ $x \in [-1, 1]$

$|x| > 1$ $-1 > x > 1$ $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

1

|x| ≥ 1-1 ≥ x ≥ 1 x∈ (-∞, −1] ∪[1, +∞)

Calcula los valores de las siguientes potencias:

$16^{\frac{3}{2}} =$

$16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = \sqrt{\left(2^4\right)^3} = \sqrt{2^{12}} = 2^6 = 64$

$8^{\frac{2}{3}} =$

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{\left(2^3\right)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

$81^{0.75} =$

$81^{0.75} = 81^{\frac{75}{100}} = 81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{\left(3^4\right)^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27$

$8^{0.333...} =$

$8^{0.333...} = 8^{\frac{3}{9}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

Halla las sumas:

$2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27} =$

$2\sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3 \cdot 5^2} + \sqrt{3^3} = 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$

$\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486} =$

$$= \sqrt{2^3 \cdot 3} - 5\sqrt{6} + \sqrt{2 \cdot 3^5} =$$

$$= 2\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + 9\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

$$2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} =$$

$$= 2\sqrt{5} + \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} - \sqrt{2^4 \cdot 5} =$$

$$= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} =$$

$$= \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} =$$

$$= 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$

Realiza las operaciones:

$$\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 =$$

$$= 7 - 2\sqrt{14} + 2 = 9 - 2\sqrt{14}$$

$$\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 =$$

$$= 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 =$$

$$= 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{5} + 2\right) \cdot \left(\sqrt{5} - 2\right) =$$

$$= \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

$$\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)=$$

$$=\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2=$$

$$=2^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2-3^2\left(\sqrt{2}\right)^2=$$

$$=4\cdot 5-9\cdot 2=20-18=2$$

Opera:

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\frac{1}{8}}}}=$$

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\frac{1}{8}}}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2^{-3}}}}=\sqrt[4]{\sqrt[6]{\frac{2^2}{\left(2^{-3}\right)^3}}}=\sqrt[4]{\sqrt[6]{\frac{2^2}{2^{-9}}}}=\sqrt[4]{\sqrt[6]{2^{11}}}=\sqrt[24]{2^{11}}$$

Efectúa:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}}=$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}}=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{2\cdot 2^2}}}}}=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}}}}=\sqrt[72]{2^3}=\sqrt[24]{2}$$

Calcula:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{4-3}=1$$

$$\sqrt{\frac{a-b}{(a-b)^2}\cdot\frac{a+b}{a^2-b^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2\cdot(a^2-b^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}} = \frac{1}{a-b}$$

Racionalizar

$$\frac{5}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2^2}} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{3}} =$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{2\cdot(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{3})} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$\frac{6-2\sqrt{3}}{9-3} = \frac{6-2\sqrt{3}}{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$$

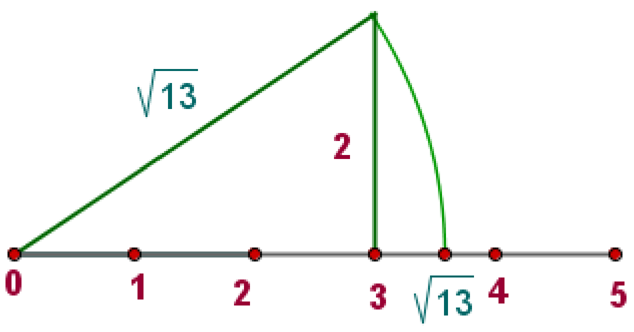
$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2^2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2+\sqrt{6}}{3-2} = 2+\sqrt{6}$$

Números reales. Ejercicios RESUELTOS

1

Representa en la recta: $\sqrt{13}$



Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

$|x - 2| < 1$ $|x - 2| \leq 1$ $|x - 2| > 1$ $|x - 2| \geq 1$

$|x - 2| < 1$ $-1 < x - 2 < 1$ $1 < x < 3$

$x \in (1, 3)$

$|x - 2| \leq 1$ $-1 \leq x - 2 \leq 1$ $1 \leq x \leq 3$

x $\in$[1, 3]

|x −2| > 1 -1 > x −2 > 1 1 > x > 3

x $\in$(-∞ , 1) $\cup$(3, +∞)

|x −2| ≥ 1 -1 ≥ x −2 ≥ 11 ≥ x ≥ 3

x$\in$ (-∞ , 1] $\cup$[3, +∞)

Opera:

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[6]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} =$$

$$= \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + \sqrt[6]{2^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} =$$

$$= 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot \sqrt[3]{2}}} =$$

$$= 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{15}{2}\sqrt[3]{2}$$

Calcula:

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}}=$$

$$=\sqrt[12]{\frac{a^6\cdot\left(a^2\right)^4\cdot\left(a^3\right)^3}{\left(a^4\right)^2}}=\sqrt[12]{\frac{a^6\cdot a^8\cdot a^9}{a^8}}=\sqrt[12]{a^{15}}=\sqrt[4]{a^5}$$

Racionalizar:

$$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{9\cdot2-12\sqrt{6}+4\cdot3}{9\cdot2-4\cdot3}=$$

$$=\frac{18-12\sqrt{6}+12}{18-12}=$$

$$=\frac{30-12\sqrt{6}}{6}=5-2\sqrt{6}$$